

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий  
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ  
проректор

\_\_\_\_\_ П. А. Машаров  
«17» апреля 2025 г.  
МП

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА**

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа магистратуры
Направление подготовки	01.04.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы	Математика
Квалификация	Магистр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины **«Избранные задачи функционального анализа»** для обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

доцент кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений,  
канд. физ.-мат. наук

Л. Л. Оридорога

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений.  
Протокол от 08.04.2025 г. № 9а

Заведующий кафедрой

В. В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и  
информационных технологий  
16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.  
Протокол от 16.04.2025 г. № 3.  
Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной  
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.  
16.04.2025 г.

В. В. Волчков

## 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объёме программы средней школы;

дисциплины программы бакалавриата: Математический анализ, Комплексный анализ, Функциональный анализ, Дифференциальные уравнения.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Научный семинар по вопросам математического анализа, Производственная практика: научно-исследовательская работа, Производственная практика: преддипломная практика, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

## 2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы	01.04.01 Математика (профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.В.ДВ.2.2 Избранные задачи функционального анализа
Часть образовательной программы	Вариативная часть: выбор обучающегося
Количество зачетных единиц/ всего часов	4 / 144

### 2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	2	3	17	–	34	93	144	зачёт

## 3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Формирование научного мировоззрения; овладение новым математическим аппаратом; углубленная подготовка в области анализа (вещественного и комплексного); подготовка к профессиональной деятельности; подготовка к чтению специальной литературы.

## 4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

### 4.1. Компетенции

ПК-3. Способен осуществлять преподавание по программам бакалавриата и ДПП, ориентированным на соответствующий уровень квалификации

### 4.2. Индикаторы компетенций

ПК-3.4. Применяет классические и современные математические методы для решения фундаментальных задач анализа и теории операторов.

### 4.3. Результаты обучения

ПК-3.4.1. Знает определения и утверждения, приёмы доказательства утверждений, методы решения задач функционального анализа и теории операторов.

ПК-3.4.2. Умеет выбирать и использовать необходимые математические методы и вычислительные средства, решать задачи дисциплины.

ПК-3.4.3. Владеет основными методами функционального анализа.

## 5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. <i><b>Спектральная теория матриц.</b></i>	Спектр и резольвента матрицы. Различные способы вычисления функций от матрицы. Спектральные проекторы матрицы.
Раздел 2. <i><b>Некоторые классы операторов.</b></i>	Сопряжённый оператор. Унитарные, самосопряжённые и нормальные операторы.
Раздел 3. <i><b>Компактные самосопряжённые операторы.</b></i>	Теорема Гильберта. Спектральное разложение компактного самосопряжённого оператора.
Раздел 4. <i><b>Спектральная теория операторов.</b></i>	Операторозначные меры. Разложение единицы. Спектральное разложение унитарных операторов. Преобразование Кэли. Спектральное разложение самосопряжённых операторов.

## 6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 6.1. Форма обучения – очная, курс – 2, семестр – 3

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. <i><b>Спектральная теория матриц.</b></i>	<b>4</b>		<b>14</b>	<b>24</b>	<b>42</b>
Спектр и резольвента матрицы.	1		4	6	11
Различные способы вычисления функций от матрицы.	2		8	10	20
Спектральные проекторы матрицы.	1		8	8	11
Раздел 2. <i><b>Некоторые классы операторов.</b></i>	<b>4</b>		<b>10</b>	<b>20</b>	<b>34</b>
Сопряжённый оператор.	2		4	6	12
Унитарные, самосопряжённые и нормальные операторы.	2		6	14	22
Раздел 3. <i><b>Компактные самосопряжённые операторы.</b></i>	<b>2</b>		<b>10</b>	<b>12</b>	<b>24</b>
Теорема Гильберта.	1		4	4	9
Спектральное разложение компактного самосопряжённого оператора.	1		6	8	15
Раздел 4. <i><b>Спектральная теория операторов.</b></i>	<b>7</b>		<b>8</b>	<b>29</b>	<b>44</b>
Операторозначные меры. Разложение единицы.	1		2	4	7
Спектральное разложение унитарных операторов.	2		2	8	12
Преобразование Кэли.	2		2	7	11
Спектральное разложение самосопряжённых операторов.	2		2	10	14
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР / ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП	<b>17</b>	–	<b>34</b>	<b>93</b>	<b>144</b>

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Контрольные вопросы

1. Собственные числа матрицы. Собственные и присоединённые вектора матрицы.
2. Жорданова нормальная форма.
3. Спектр и резольвента матрицы.
4. Сопряжённая матрицы. Самосопряжённые и Унитарные матрицы.
5. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита.
6. Функции от матриц (ряд Лорана, диагонализация, интерполяционные многочлены).
7. Функции от матриц (представление в виде контурного интеграла).
8. Спектральные проекторы матриц.
9. Замкнутый оператор.
10. Сопряжённый оператор.
11. Изометрические и симметрические операторы.
12. Самосопряжённые и унитарные операторы.
13. Теорема Гильберта.
14. Полнота системы собственных функций компактного самосопряжённого оператора.
15. Спектральное разложение компактного самосопряжённого оператора.
16. Операторозначные меры. Разложение единицы.
17. Операторный интеграл Стильтеса.
18. Спектр и резольвента оператора.
19. Классификация точек спектра оператора.
20. Спектр самосопряжённого оператора.
21. Оценки резольвенты самосопряжённого оператора.
22. Спектр унитарного оператора.
23. Оценки резольвенты унитарного оператора.
24. Преобразование Кэли.
25. Теорема Бохнера–Хинчина.
26. Спектральное разложение унитарного оператора.
27. Спектральное разложение самосопряжённого оператора.
28. Действительная и мнимая части оператора.
29. Спектральное разложение нормального оператора.

### 7.2. Темы докладов (рефератов)

1. Жорданова нормальная форма матрицы.
2. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита.
3. Функции от матрицы. Различные способы определения и связь между ними.
4. Функции от матрицы как контурный интеграл..
5. Спектральные проекторы нормальных матриц.
6. Оператор сопряжённый к неограниченному.
7. Спектр и резольвента оператора.
8. Изометрические и унитарные операторы. Свойства их спектра и резольвенты.
9. Симметрические и самосопряжённые операторы. Свойства их спектра и резольвенты.
10. Теорема Гильберта.
11. Разложение единицы.
12. Операторные интегралы Стильтеса.
13. Тригонометрическая проблема моментов.

14. Теорема Бохнера–Хинчина.
15. Спектральное разложение унитарного оператора.
16. Спектральное разложение самосопряжённого оператора.
17. Функции от унитарного оператора.
18. Преобразование Кэли.
19. Спектр и резольвента унитарных и изометрических операторов..
20. Спектр и резольвента самосопряжённых и симметрических операторов..

### 7.3. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике темам:

- функции от матриц;
- унитарные и самосопряжённые операторы
- спектральная теория операторов.

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

## 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже. Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кого набранные баллы не устраивают, сдают зачёт. Максимальное количество баллов за зачёт – 100. Оценка за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на зачёте и выставляется согласно принятому порядку.

### 8.1. Семестр 3

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-4	Организационно-учебная работа в аудитории	5
	Самостоятельная работа	5
	Контрольные работы по практике	50
	Контрольная работа по теоретическому материалу	40
ИТОГО		100
Зачёт		100
Общий итог за семестр		100

### Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

## 9. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ И ИНВАЛИДОВ

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- 1) для слепых и слабовидящих:
  - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
  - для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств;
  - письменные задания оформляются увеличенным шрифтом.
- 2) для глухих и слабослышащих:
  - лекции оформляются в виде электронного документа;
  - письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме;
  - экзамен проводится в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.
- 3) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
  - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
  - письменные задания выполняются на компьютере;
  - экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- 1) для слепых и слабовидящих:
  - в печатной форме увеличенным шрифтом;
  - в форме электронного документа;
- 2) для глухих и слабослышащих:
  - в печатной форме;
  - в форме электронного документа.
- 3) для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
  - в печатной форме;
  - в форме электронного документа.

## 10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения лабораторных занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины применяются электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

## 11. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 11.1. Основная литература

1. Ланкастер П. Теория матриц [Текст] / П. Ланкастер; перевод с англ. С. П. Демушкина. - 2-е изд. - Москва: Наука, 1982. - 269 с.
2. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман – М.: Наука, 1966. — 543 с.

### 11.2. Дополнительная литература

3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. - Изд. 5-е. - Москва: Физматлит, 2004 (ОАО Чебоксарская тип. j 1). - 559 с.
4. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : [Учебник для мат. специальностей ун-тов] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 4-е изд., перераб. - Москва: Наука, 1976. - 543 с.

## 12. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.

2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

3. Научная электронная библиотека **«КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/>. – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

4. Электронно-библиотечная система **«Лань»:** [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

5. **ЭБС Юрайт:** электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://biblio-online.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/>

(дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.

8. **Электронный архив ДонГУ:** раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный.

### 13. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. MicrosoftOffice (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. MicrosoftVisualStudio (лицензия программы DreamSpark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, AdobeAcrobatReader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).